Universidad Andrés Bello

solemne 3 - 2015

P.1 Considere la region $\Omega = [0,a] \times [0,b]$ en $\mathbb{R}^2$, y sobre ella una membrana o tambor rectangular cuyos bordes están fijos. Sea $u(x,y,t)$ el desplazamiento vertical de la membrana en el punto (x,y) de Ω en el instante $t \geq 0$, de manera que al estar fijos los bordes, se tiene que $u(x,y,t) = 0$ para todo (x,y) en $\partial\Omega$. Suponga que cuando $t=0$ se tiene que:

a) $u(x,y,0) = 2 \operatorname{sen}\left[\frac{3\pi x}{a}\right] \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi y}{b}\right]$

b) $\frac{\partial}{\partial t} u(x,y,t)\Big|_{t=0} = 0$

Encuentre la solución $u(x,y,t)$ de la ecuación de onda.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Con las condiciones de borde espacio - temporales dadas.

solución:

Tenemos $u(x,y,t)$, usando el método de separación de variable, podemos hacer la siguiente suposicion sobre $u(x,y,t)$:

$$u(x,y,t) = X(x)\,Y(y)\,T(t)$$

Reemplazamos en la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}[XYT] + \frac{\partial^2}{\partial y^2}[XYT] = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}[XYT]$$

$$YT \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + XT \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2} XY \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}$$

simplificamos un poco la notación.

$$YTX'' + XTY'' = \frac{1}{c^2} XYT''$$

dividimos entre XYT, asumiendo $XYT \neq 0$

$$\frac{YTX''}{XYT} + \frac{XTY''}{XYT} = \frac{1}{c^2} \frac{XYT''}{XYT}$$

Escaneado con CamScanner

2|

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = \frac{1}{c^2}\frac{T''}{T} \quad \cdots (1)$$

Tomamos una constante de separacion $-\alpha^2$ para X''/X:

$$\frac{X''}{X} = -\alpha^2 \quad \cdots (2)$$

la solución de dicha ecuación es:

$$X_\alpha(x) = A_\alpha \cos(\alpha x) + B_\alpha \operatorname{sen}(\alpha x)$$

Aplicamos la condición de borde $u(0,y,t) = 0$

$$\Rightarrow X_\alpha(0) = A_\alpha \cos[\alpha(0)] + B_\alpha \operatorname{sen}[\alpha(0)] = 0.$$

$$A_\alpha [1] + B_\alpha [0] = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{A_\alpha = 0}$$

EnTonces, la función X_α va quedando: $X_\alpha(x) = B_\alpha \operatorname{sen}(\alpha x)$.

Aplicando la condición de borde $u(a,y,t) = 0$

$$\Rightarrow X_\alpha(a) = B_\alpha \operatorname{sen}[\alpha(a)] = 0$$

$$\operatorname{sen}[\alpha(a)] = 0, \text{ asumiendo } B_\alpha \neq 0$$

$$\rightarrow \alpha a = n\pi$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha_n = \frac{n\pi}{a}}$$

EnTonces, la función X_α quede: $X_{\alpha_n}(x) = B_{\alpha_n} \operatorname{sen}(\alpha_n x)$.

$$\boxed{X_n(x) = B_n \operatorname{sen}\left[\frac{n\pi}{a} x\right]}$$

Escogemos una constante de separación $-\beta^2$ para Y''/Y:

$$\frac{Y''}{Y} = -\beta^2 \quad \cdots (3)$$

la solución de dicha ecuación es:

$$Y_\beta(y) = A_\beta \cos(\beta y) + B_\beta \operatorname{sen}(\beta y)$$

Escaneado con CamScanner

Universidad Andrés Bello

Aplicamos la condición de borde: $u(x,0,t) = 0$.

$\Rightarrow Y_\beta(0) = A_\beta \cos[\beta(0)] + B_\beta \operatorname{sen}[\beta(0)] = 0$.

$A_\beta [1] + B_\beta [0] = 0$.

$\Rightarrow \boxed{A_\beta = 0}$

Entonces, la función Y_β va quedando: $Y_\beta(y) = B_\beta \operatorname{sen}(\beta y)$

Aplicando la condición de borde: $u(x,b,t) = 0$

$\Rightarrow Y_\beta(b) = B_\beta \operatorname{sen}[\beta(b)] = 0$

$\operatorname{sen}[\beta(b)] = 0$, asumiendo $B_\beta \neq 0$.

$\rightarrow \beta(b) = m\pi$

$\Rightarrow \boxed{\beta = \frac{m\pi}{b}}$

Entonces, la función Y_β queda: $Y_{\beta_m}(y) = B_{\beta_m} \operatorname{sen}(\beta_m y)$

$$\boxed{Y_m(y) = B_m \operatorname{sen}\left[\frac{m\pi}{b} y\right]}$$

Ahora, regresamos a la ecuación (1) y reemplazamos (2) y (3):

$$\frac{1}{c^2}\frac{T''}{T} = -\alpha^2 - \beta^2$$

$$\frac{T''}{T} = -c^2[\alpha^2 + \beta^2]$$

reemplazamos las expresiones halladas para α y β:

$$\frac{T''}{T} = -c^2\left[\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2\right]$$

$$\frac{T''}{T} = -(c\pi)^2\left[\left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2\right] \quad \cdots (4)$$

Escaneado con CamScanner

4|

Podemos convenir en llamar a la expresion (4) como $T_{n,m}(t)$:

$$\Rightarrow T_{n,m}(t) = -(c\pi)^2 \left[\left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2\right]$$

utilizando la expresión anterior, podemos escribir la solucion general. sin embargo, es importante recordar que aun es necesario aplicar las condiciones iniciales, respecto al tiempo.

$$\Rightarrow u(x,y,t) = \sum_{n,m} A_{n,m}\, T_{n,m}(t)\, X_n(x)\, Y_m(y).$$

reemplazamos las expresiones halladas para X_n y Y_m, tenemos:

$$u(x,y,t) = \sum_{n,m} A_{n,m}\, T_{n,m}(t)\, B_n \operatorname{sen}\left[\frac{n\pi}{a}x\right] B_m \operatorname{sen}\left[\frac{m\pi}{b}y\right]$$

Siendo, $A_{n,m}$, B_n, B_m constantes por determinar, pero que comparten su dependencia de n y m. Podemos integrerlas todas en una única constante. Dicha constante la seguiremos llamando $A_{n,m}$.

$$\Rightarrow u(x,y,t) = \sum_{n,m} A_{n,m}\, T_{n,m}(t) \operatorname{sen}\left[\frac{n\pi}{a}x\right] \operatorname{sen}\left[\frac{m\pi}{b}y\right] \quad \cdots (5)$$

Ahora, aplicamos la condición inicial: $u(x,y,0) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{a}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{b}y\right)$

$$\Rightarrow u(x,y,0) = \sum_{n,m} A_{n,m}\, T_{n,m}(0) \operatorname{sen}\left[\frac{n\pi}{a}x\right] \operatorname{sen}\left[\frac{m\pi}{b}y\right] = 2\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{a}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{b}y\right)$$

Comparando ambas expresiones, vemos que los terminos de la sumatoria asociados a los indices $n=3$ y $m=2$, son los unicos que cumplen la condicion inicial.

Tambien, de la comparación de expresiones., y usando los valores de n y m tenemos:

$$A_{3,2}\, T_{3,2}(0) = 2 \quad \cdots (*)$$

Entonces la expresión (5) queda como:

$$u(x,y,t) = A_{3,2}\, T_{3,2}(t) \operatorname{sen}\left[\frac{3\pi}{a}x\right] \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{b}y\right]$$

Escaneado con CamScanner

Universidad Andrés Bello

Aplicando, la condicion inicial: $\frac{\partial}{\partial t} u(x,y,t)\Big|_{t=0} = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} u(x,y,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left[A_{3,2}\, T_{3,2}(t)\, \text{sen}\left[\frac{3\pi}{a}x\right] \text{sen}\left[\frac{2\pi}{b}y\right]\right]$$

$$= A_{3,2}\, T'_{3,2}(t)\, \text{sen}\left[\frac{3\pi}{a}x\right] \text{sen}\left[\frac{2\pi}{b}y\right]$$

donde: $T'_{3,2}(t) \equiv \frac{dT_{3,2}}{dt}$

$$\Rightarrow A_{3,2}\, T'_{3,2}(0)\, \text{sen}\left[\frac{3\pi}{a}x\right] \text{sen}\left[\frac{2\pi}{b}y\right] = 0$$

Asumiendo que $\text{sen}\left[\frac{3\pi}{a}x\right] \neq 0$ y $\text{sen}\left[\frac{2\pi}{b}y\right] \neq 0$, Tenemos:

$$A_{3,2}\, T'_{3,2}(0) = 0 \quad \cdots (**)$$

Usando los resultados obtenidos, podemos expresar lo siguiente para la expresion (4):

$$\frac{T''_{3,2}(t)}{T_{3,2}(t)} = -(c\pi)^2\left[\left(\frac{3}{a}\right)^2 + \left(\frac{2}{b}\right)^2\right] \quad \cdots (6)$$

Ahora, debemos resolver $T''_{3,2}/T_{3,2}$, para que cumpla $T_{3,2}(0) = 2$ y $T'_{3,2}(0) = 0$ que provienen de les expresiones (*) y (**).

⇒ nota| Como $A_{3,2}$ no afecta significativamente a las expresiones (*) y (**), podemos ignorarla. Sin embargo, debe Tenerse presente que no esta siendo anulada.

Podemos convenir que:

$$(c\pi)^2\left[\left(\frac{3}{a}\right)^2 + \left(\frac{2}{b}\right)^2\right] = \mu^2$$

Entonces

$$\frac{T''_{3,2}(t)}{T_{3,2}(t)} = -\mu^2$$

Escaneado con CamScanner

6|

Con base en lo anterior, podemos expresar la solución de $T''_{3,2}/T_{3,2}$ como:

$$T_n(t) = A_n \cos(nt) + B_n \operatorname{sen}(nt).$$

usando la condición $T'_n(0) = 0$, Tenemos:

$$\rightarrow T'_n(t) = -A_n(n)\operatorname{sen}(nt) + B_n(n)\cos(nt).$$

$$\rightarrow -A_n(n)\operatorname{sen}[n(0)] + B_n(n)\cos[n(0)] = 0$$

$$-A_n(n)[0] + B_n(n)[1] = 0$$

$$\rightarrow B_n(n) = 0$$

$$\rightarrow \boxed{B_n = 0} \text{ ; asumiendo } n \neq 0$$

Entonces, $T_n(t)$ va quedando: $T_n(t) = A_n \cos(nt)$

Ahora, podemos analizar la expresion (6), para ello debemos calcular la segunda derivada de $T_n(t)$:

$$\rightarrow T'_n(t) = -A_n(n)\operatorname{sen}(nt). \rightarrow T''_n(t) = -A_n(n^2)\cos(nt).$$

reemplazamos en (6):

$$\frac{-A_n(n^2)\cos(nt)}{A_n\cos(nt)} = -(c\pi)^2\left[\left(\frac{3}{a}\right)^2 + \left(\frac{2}{b}\right)^2\right]$$

$$-n^2 = -(c\pi)^2\left[\left(\frac{3}{a}\right)^2 + \left(\frac{2}{b}\right)^2\right]$$

$$n^2 = (c\pi)^2\left[\left(\frac{3}{a}\right)^2 + \left(\frac{2}{b}\right)^2\right]$$

$$\rightarrow \boxed{n = c\pi\sqrt{\left(\frac{3}{a}\right)^2 + \left(\frac{2}{b}\right)^2}}$$

Entonces $T_n(t)$ queda como:

$$\boxed{T(t) = A\cos\left\{\left[c\pi\sqrt{\left(\frac{3}{a}\right)^2 + \left(\frac{2}{b}\right)^2}\right](t)\right\}}$$

Escaneado con CamScanner

Universidad Andrés Bello

Ahora, aplicamos la condicion inicial: $T_{3,2}(0) = 2$.

$$\Rightarrow T(0) = A \cos\left\{\left[c\pi\sqrt{\left(\frac{3}{a}\right)^2+\left(\frac{2}{b}\right)^2}\right](0)\right\} = 2.$$

$$\Rightarrow A[1] = 2.$$

$$\boxed{A = 2}$$

Entonces la exprosion $T(t)$ quede como:

$$T(t) = 2\cos\left\{\left[c\pi\sqrt{\left(\frac{3}{a}\right)^2+\left(\frac{2}{b}\right)^2}\right](t)\right\}$$

Por lo Tanto, la solucion general es:

$$\boxed{u(x,y,t) = 2\cos\left\{\left[c\pi\sqrt{\left(\frac{3}{a}\right)^2+\left(\frac{2}{b}\right)^2}\right](t)\right\}\operatorname{sen}\left[\frac{3\pi}{a}x\right]\operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{b}y\right]}$$

Escaneado con CamScanner